به نام آن که جان را فکرت آموخت

کاربرد احتمالات در مالی

ترجمه:

فریبرز کبیری

مقدمه

این کتاب به‌منظور حمایت فنی از دانشجویان مالی ارائه گردیده است. به‌همین جهت به آن احتمال مالی اطلاق کرده‌ایم. هدف ما ارائه ابزار اصلی تئوری احتمال برای درک مدل‌های مالی می‌باشد. در نتیجه، تقریباً همه مثال‌ها با احتمال نتایج حوزه‌های اقتصادی و مالی مرتبط هستند. این بدان معنی است که فرض می‌کنیم خوانندگان از دانش ابتدایی مالی و اقتصاد خرد برخوردار می‌باشند، همچنین دانش اولیه در مورد تجزیه و تحلیل و جبر خطی را نیز دارا هستند.

از زمان کار اصلی مارکوئیتز[۱] (۱۹۵۲) بر روی تنوع‌بخشی بدره[۲]، مدل‌های ریاضی بازارهای مالی به‌طور شگفت‌انگیزی توسعه یافته‌اند. مدل‌های قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای شارپ[۳] (۱۹۶۴)، لینتنر[۴] (۱۹۶۵) و موسین[۵] (۱۹۶۶) در دهه شصت میلادی بنا شدند و نسخه زمان پیوسته مدل‌های مالی نیز در پایان همین دهه آغاز گردید (مرتون[۶]، ۱۹۷۱، ۱۹۶۹). مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معاملات به دنبال مدل بلک–شولز–مرتون (بلک–شولز در سال ۱۹۷۳ و مرتون در سال ۱۹۷۳) به‌عنوان یک رویکرد ریاضی از قیمت‌گذاری قراردادهای مشتقه بوجود آمدند. با شکل گیری محصولات پیچیده مالی، تقاضا برای مدل‌های ارزیابی نیز افزایش یافت. این مدل‌ها اساساً مبتنی بر ریاضیات، و به‌طور دقیق‌تر، مبتنی بر نظریه احتمال و فرآیندهای تصادفی هستند.

امروزه، هر دانشجوی مالی با بسیاری از مفاهیم ریاضی مواجه است، بعضی از آن‌ها بسیار غیرطبیعی هستند و بعضی از آن‌ها بسیار پیچیده‌تر از آنچه که در مقاطع کارشناسی ارشد اقتصاد و مدیریت ارائه می‌شوند، می‌باشند. این کتاب سعی دارد فاصله بین آنچه

1-Markowitz.
2-portfolio diversification.
3-Capital Asset Pricing Model of Sharpe
4-Lintner.
5-Mossian.
6-Merton.

دانشجویان واقعا می‌دانند و آنچه که باید برای ورود به جهان مدل‌های مالی بدانند، پُـر کنـد. یکی از اهداف ما ارائه این ابزار به یک روش آموزشی است، البته این به‌معنـی آسـان بـودن مطالعه آن نیست. در عمل برای مدیریت ابزار به کار سخت نیاز می‌باشد.

این کتاب به چهار فصـل تقسـیم شـده اسـت. فصـل ۱ بـه فضـاهای احتمـال و متغیرهای تصادفی می‌پردازد. هدف فصل اول، توضیح چگونگی بیان ریاضـی توصـیف عدم اطمینان مرتبط با بازارهای مالی و بازده‌ها است. قیمت‌ها و بازده‌ها را مـی‌تـوان از طریق میانگین بازده‌ها و قیمت‌ها، پراکندگی ارزش‌های آتی احتمالی یـا رابطـه‌ی بـین بازده‌های سهام‌های مختلف به‌طور خلاصه ارزیابی کرد. ایـن کمیـت‌هـا، گشـتاورهای توزیع احتمال قیمت‌ها یا گشتاورهای توزیع احتمال بازده‌ها نامیده مـی‌شـوند. آن‌هـا در فصل ۲ ارائه شده‌اند.

فرآتر از ارائه مصنوعی متغیرهای تصادفی بوسیله گشتاورها، یک نگرش با جزئیات بیش‌تر برای تعیین چگونگی انتشار ارزش‌های آتی احتمالی در امتداد خـط واقعـی لازم است. این بدان معنی است که توصیف توزیع احتمـال متغیرهـای اقتصـادی بـازده‌هـا، نرخ‌های بهره یا نرخ‌های ارز ضروری می‌باشد.

در نهایت، بنگاه‌های اقتصادی اطلاعات را در طول زمـان تحصـیل مـی‌کننـد (بـا هزینه یا بدون هزینه). اطلاعات جدید باورها درباره درسـت‌نمـایی پیشـامدهای آتـی را تغییر می‌دهند؛ یا به دیگر سخن، درک از احتمالات پیشامدهای آتی را تغییر مـی‌دهـد. توزیع احتمال مربوط به متغیرهای اقتصادی تعدیل می‌گردد، به‌همـین دلیـل بخشـی از فصل ۴ به توزیع شرطی[۱] و انتظارات شرطی[۲] اختصاص یافته است.

بخش دوم فصل آخر برای یک انتقال هموار بین مـدل‌هـای تـک دوره‌ای و چنـد دوره‌ای، قواعد حد و همگرایی را معرفی می‌کند. در حقیقت، اساساً دو دسته از مدل‌های مالی وجود دارند. آن‌ها را می‌توان از طریق روش‌های ارزیابی وابسـته بـه زمـان از هـم متمایز ساخت. در مدل‌های زمان گسسته[۳]، بازارها در مجموعه‌ای از زمان‌ها (محدود یـا

1-Conditional distributions.
2-Conditional expectations.
3-Discrete-time models.

قابل شمارش) باز هستند در حالی‌که در مدل‌های زمان پیوسته[1]، بازارها در همه زمان‌ها (همواره) باز هستند. پس بررسی این که آیا مدل زمانی پیوسته (بنا به تعریـف) محـدود به یک دنباله از مدل‌های زمان گسسته است که در آن دیرش[2] بین دو زمان تـراکنش[3] به صفر نزدیک می‌شود، یا نه مهم می‌باشد.

1-Continuous-time models.
2-Duration.
3-Transaction.

فهرست مطالب

فصل ۱

فضاهای احتمال و متغیرهای تصادفی

۱-۱ فضاهای قابل اندازه‌گیری[1] و اندازه احتمال

برای شروع با یک نگرش ساده، دوره زندگی بنگاه‌های اقتصادی در اقتصاد را تک دوره‌ای فرض می‌کنیم به‌طوری که در آن زمان آغاز $t = ۰$ و زمان پایان $T = ۱$ می‌باشد. بعضی از اوراق بهادار مالی (دارایی‌ها) در زمان صفر در بازار معامله می‌شوند و عایدات را در زمان یک تولید می‌نمایند.

بسته به تعداد دارایی‌ها و پیچیدگی مدل مورد نظر، می‌توانیم تعدادی از وضعیت‌های احتمالی را برای عایدات و، به‌طور کلی، برای کل اقتصاد در نظر بگیریم. مجموعه‌ای از احتمالات به‌عنوان مجموعه حالات طبیعی[2] شناخته می‌شود و با نماد Ω نشان داده می‌شود.[3] بسته به این که چگونه بخواهیم بازار را توصیف کنیم، Ω می‌تواند متناهی یا نامتناهی در نظر گرفته شود.

زیر مجموعه‌های Ω از حالات طبیعی ساخته شده‌اند که اطلاعات درباره وضعیت ممکن (احتمالی) در تاریخ T را توصیف می‌کنند. برای مثال، اگر فقط یک دارایی مخاطره‌دار در بازار معامله شده باشد، طیفی از قیمت‌های نهایی برای این دارایی با زیر مجموعه‌های طبیعی همراه است. بنا به دلایل فنی، جزئیات را در این‌جا بررسی

---

[1] Measurable Space.

[2] Set of States of Nature.

[3] در کتاب‌های ریاضی تئوری احتمال، Ω اغلب برای بیان فضای نمونه آزمایش تصادفی استفاده می‌شود. در متن کتاب ما آزمایش تصادفی که در آن بعضی از وضعیت‌ها را انتخاب می‌کنیم اقتصاد یا بازارهای مالی هستند.

نمی‌کنیم، وقتی Ω بسیار بزرگ است همه‌ی زیر مجموعه‌های Ω را نمی‌توان در مدل در نظر گرفت.[۱] اگر $\mathcal{P}(\Omega)$ نشان دهنده مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های Ω باشد، مدل را به زیر مجموعه‌های سازگار با بعضی ویژگی‌های قابل قبول مجاز برای تعریف اندازه احتمال محدود می‌کنیم. به‌همین جهت (شاید) به مفهوم انتزاعی از جبر$-\sigma$ نیاز داریم.[۲]

۱-۱-۱ σ-جبری (یا تبار) مبتنی بر مجموعه Ω

تعریف ۱ اجازه دهید Ω نماد مجموعه‌ای از حالات طبیعی باشد و $\mathcal{P}(\Omega)$ مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های Ω باشد: جبر$-\sigma$ مبتنی بر Ω (که همچنین تبار نیز نامیده می‌شود) یک زیر مجموعه $\mathcal{A}$ از $\mathcal{P}(\Omega)$ است که با موارد زیر سازگار است:

۱. $\Omega \in \mathcal{A}$
۲. $\forall\, B \in \mathcal{A},\ B^C \in \mathcal{A}$

در این‌جا B^C متمم B است و بوسیله $B^C = \{\omega \in \Omega \,/\, \omega \notin B\}$ تعریف می‌شود. پس $\mathcal{A}$ نسبت به متمم بسته است.

۳. برای هر دنباله $(B_n, n \in \mathbb{N})$ از اعضاء $\mathcal{A}$، داریم $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{A}$. به دیگر سخن $\mathcal{A}$ نسبت به اجتماع قابل شمارش بسته است.

جفت $(\Omega, \mathcal{A})$ فضای قابل اندازه‌گیری[۳] نامیده می‌شود و اعضا $\mathcal{A}$ پیشامدها[۴] نامیده می‌شوند. پیشامدی که فقط شامل یک حالت طبیعی می‌باشد، یک پیشامد ساده[۵] است.

---

[۱] وقتی Ω قابل شمارش نیست، اندازه احتمال نمی‌تواند روی $\mathcal{P}(\Omega)$ به روش سازگار تعریف شود. این در قسمت ۳-۱-۱ تعدیل شده است.

[۲] نماد σ اغلب در مالی برای نشان دادن انحراف معیار بازده اوراق بهادار مالی (به فصل ۲ نگاه کنید) استفاده می‌شود. در این‌جا، ارتباطی با تفسیر معمول ندارد، اما σ-جبری معمولا در نظریه احتمال برای بیان مفهموی است که در زیر تعریف شده است.

[3] Measurable Space.
[4] Events.
[5] Elementary Event.