

به نام آن که جان را فطرت آموخت

# کاربرد احتمالات در مالی

ترجمه:

فریبرز کبیری



## مقدمه

این کتاب به منظور حمایت فنی از دانشجویان مالی ارائه گردیده است. به همین جهت به آن احتمال مالی اطلاق کرده‌ایم. هدف ما ارائه ابزار اصلی تئوری احتمال برای درک مدل‌های مالی می‌باشد. در نتیجه، تقریباً همه مثال‌ها با احتمال نتایج حوزه‌های اقتصادی و مالی مرتبط هستند. این بدان معنی است که فرض می‌کنیم خوانندگان از دانش ابتدایی مالی و اقتصاد خرد برخوردار می‌باشند، همچنین دانش اولیه در مورد تجزیه و تحلیل و جبر خطی را نیز دارا هستند.

از زمان کار اصلی مارکوئیتز<sup>۱</sup> (۱۹۵۲) بر روی تنوع‌بخشی بدره<sup>۲</sup>، مدل‌های ریاضی بازارهای مالی به‌طور شگفت‌انگیزی توسعه یافته‌اند. مدل‌های قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای شارپ<sup>۳</sup> (۱۹۶۴)، لینتner<sup>۴</sup> (۱۹۶۵) و موسین<sup>۵</sup> (۱۹۶۶) در دهه شصت میلادی بنا شدند و نسخه زمان پیوسته مدل‌های مالی نیز در پایان همین دهه آغاز گردید (مرتون<sup>۶</sup>، ۱۹۷۱، ۱۹۶۹). مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معاملات به دنبال مدل بلک-شولز-مرتون (بلک-شولز در سال ۱۹۷۳ و مرتون در سال ۱۹۷۳) به‌عنوان یک رویکرد ریاضی از قیمت‌گذاری قراردادهای مشتقه بوجود آمدند. با شکل‌گیری محصولات پیچیده مالی، تقاضا برای مدل‌های ارزیابی نیز افزایش یافت. این مدل‌ها اساساً مبتنی بر ریاضیات، و به‌طور دقیق‌تر، مبتنی بر نظریه احتمال و فرآیندهای تصادفی هستند.

امروزه، هر دانشجوی مالی با بسیاری از مفاهیم ریاضی مواجه است، بعضی از آن‌ها بسیار غیرطبیعی هستند و بعضی از آن‌ها بسیار پیچیده‌تر از آنچه که در مقاطع کارشناسی ارشد اقتصاد و مدیریت ارائه می‌شوند، می‌باشند. این کتاب سعی دارد فاصله بین آنچه

---

1-Markowitz.

2-portfolio diversification.

3-Capital Asset Pricing Model of Sharpe

4-Lintner.

5-Mossian.

6-Merton.

دانشجویان واقعا می‌دانند و آنچه که باید برای ورود به جهان مدل‌های مالی بدانند، پُر کند. یکی از اهداف ما ارائه این ابزار به یک روش آموزشی است، البته این به معنی آسان بودن مطالعه آن نیست. در عمل برای مدیریت ابزار به کار سخت نیاز می‌باشد.

این کتاب به چهار فصل تقسیم شده است. فصل ۱ به فضاهای احتمال و متغیرهای تصادفی می‌پردازد. هدف فصل اول، توضیح چگونگی بیان ریاضی توصیف عدم اطمینان مرتبط با بازارهای مالی و بازده‌ها است. قیمت‌ها و بازده‌ها را می‌توان از طریق میانگین بازده‌ها و قیمت‌ها، پراکندگی ارزش‌های آتی احتمالی یا رابطه‌ی بین بازده‌های سهام‌های مختلف به‌طور خلاصه ارزیابی کرد. این کمیت‌ها، گشتاورهای توزیع احتمال قیمت‌ها یا گشتاورهای توزیع احتمال بازده‌ها نامیده می‌شوند. آن‌ها در فصل ۲ ارائه شده‌اند.

فرآتر از ارائه مصنوعی متغیرهای تصادفی بوسیله گشتاورها، یک نگرش با جزئیات بیش‌تر برای تعیین چگونگی انتشار ارزش‌های آتی احتمالی در امتداد خط واقعی لازم است. این بدان معنی است که توصیف توزیع احتمال متغیرهای اقتصادی بازده‌ها، نرخ‌های بهره یا نرخ‌های ارز ضروری می‌باشد.

در نهایت، بنگاه‌های اقتصادی اطلاعات را در طول زمان تحصیل می‌کنند (با هزینه یا بدون هزینه). اطلاعات جدید باورها درباره درست‌نمایی پیشامدهای آتی را تغییر می‌دهند؛ یا به دیگر سخن، درک از احتمالات پیشامدهای آتی را تغییر می‌دهد. توزیع احتمال مربوط به متغیرهای اقتصادی تعدیل می‌گردد، به‌همین دلیل بخشی از فصل ۴ به توزیع شرطی<sup>۱</sup> و انتظارات شرطی<sup>۲</sup> اختصاص یافته است.

بخش دوم فصل آخر برای یک انتقال هموار بین مدل‌های تک دوره‌ای و چند دوره‌ای، قواعد حد و همگرایی را معرفی می‌کند. در حقیقت، اساساً دو دسته از مدل‌های مالی وجود دارند. آن‌ها را می‌توان از طریق روش‌های ارزیابی وابسته به زمان از هم متمایز ساخت. در مدل‌های زمان گسسته<sup>۳</sup>، بازارها در مجموعه‌ای از زمان‌ها (محدود یا

---

1-Conditional distributions.

2-Conditional expectations.

3-Discrete-time models.

قابل شمارش) باز هستند در حالی که در مدل‌های زمان پیوسته<sup>۱</sup>، بازارها در همه زمان‌ها (همواره) باز هستند. پس بررسی این که آیا مدل زمانی پیوسته (بنا به تعریف) محدود به یک دنباله از مدل‌های زمان گسسته است که در آن دیرش<sup>۲</sup> بین دو زمان تراکنش<sup>۳</sup> به صفر نزدیک می‌شود، یا نه مهم می‌باشد.

---

1-Continuous-time models.

2-Duration.

3-Transaction.



# فهرست مطالب

## فصل ۱ فضاهای احتمال و متغیرهای تصادفی ۱

- ۱-۱ فضاهای قابل اندازه‌گیری و اندازه احتمال ۲
- ۱-۱-۱  $\sigma$ -جبری (یا تبار) مبتنی بر مجموعه  $\Omega$  ۳
- ۱-۱-۲ زیر تبارهای  $A$  ۵
- ۱-۱-۳ اندازه احتمال ۸
- ۱-۲ احتمال شرطی و قاعده بیز ۱۲
- ۱-۲-۱ پیشامدهای مستقل و تبارهای مستقل ۱۲
- ۱-۲-۲ اندازه احتمال شرطی ۱۵
- ۱-۲-۳ قاعده بیز ۱۷
- ۱-۳ متغیرهای تصادفی و توزیع احتمال ۲۰
- ۱-۳-۱ متغیرهای تصادفی و تولید تبارها ۲۰
- ۱-۳-۲ متغیرهای تصادفی مستقل ۲۵
- ۱-۳-۳ توزیع احتمالات و توزیع تجمعی ۲۶
- ۱-۳-۴ متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته ۳۱
- ۱-۳-۵ تبدیلات متغیرهای تصادفی ۳۳

## فصل ۲ گشتاورهای متغیر تصادفی ۳۵

- ۲-۱ انتظارات به زبان ریاضی ۳۶
- ۲-۱-۱ انتظارات مرتبط با متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته ۳۷

- ۲-۱-۲ انتظارات: مورد کلی ۳۹
- ۲-۱-۳ توصیف: نابرابری جنسن و تناقض سنت-پترزبورگ ۴۲
- ۲-۲ واریانس و گشتاورهای بالاتر ۴۶
- ۲-۲-۱ گشتاور مرتبه دوم ۴۶
- ۲-۲-۲ چولگی و کشیدگی ۴۹
- ۲-۳ فضای بُرداری متغیرهای تصادفی ۵۱
- ۲-۳-۱ متغیرهای تصادفی تقریباً قطعاً برابر ۵۲
- ۲-۳-۲ فضای  $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ۵۴
- ۲-۳-۳ فضای  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ۵۷
- ۲-۳-۴ کوواریانس و همبستگی ۶۲
- ۲-۴ احتمالات هم‌ارز و مشتق‌های رادون-نیکودیم ۶۶
- ۲-۴-۱ شهودی ۶۶
- ۲-۴-۲ مشتق‌های رادون-نیکودیم ۷۱
- ۲-۵ عوامل تصادفی ۷۳
- ۲-۵-۱ تعاریف ۷۳
- ۲-۵-۲ برنامه‌ای برای انتخاب بدره ۷۵

### فصل ۳ توزیع‌های مرسوم احتمال در مدل‌های مالی ۷۹

- ۳-۱ توزیع‌های گسسته ۸۰
- ۳-۱-۱ توزیع برنولی ۸۰
- ۳-۱-۲ توزیع دو جمله‌ای ۸۳
- ۳-۱-۳ توزیع پواسون ۸۵
- ۳-۲ توزیع‌های پیوسته ۸۸
- ۳-۲-۱ توزیع یکنواخت ۸۸
- ۳-۲-۲ توزیع گوسی (نرمال) ۹۱
- ۳-۲-۳ توزیع نرمال لگاریتمی ۹۵

۳-۳ بعضی دیگر از توزیع‌های مرسوم ۱۰۰

۳-۳-۱ توزیع  $\chi^2$  ۱۰۰

۳-۳-۲ توزیع t-اسیودنت ۱۰۲

۳-۳-۳ توزیع اسندکور ۱۰۳

## فصل ۴ انتظارات شرطی و قضایای حد ۱۰۵

۴-۱ انتظارات شرطی ۱۰۶

۴-۱-۱ مثال مقدماتی (اولیه) ۱۰۶

۴-۱-۲ توزیع‌های شرطی ۱۰۸

۴-۱-۳ انتظارات شرطی با توجه به یک پیشامد ۱۰۹

۴-۱-۴ انتظارات شرطی با توجه به متغیر تصادفی ۱۱۰

۴-۱-۵ انتظارات شرطی با توجه به زیر تبار ۱۱۲

۴-۲ تفسیر هندسی  $(L^2(\Omega, A, P))$  ۱۱۴

۴-۲-۱ مثال اولیه ۱۱۴

۴-۲-۲ انتظارات شرطی به‌عنوان تصویری در  $L^2$  ۱۱۵

۴-۳ ویژگی‌های انتظارات شرطی ۱۱۷

۴-۳-۱ مورد بردار گوسی ۱۱۹

۴-۴ قانون اعداد بزرگ و قضیه حد مرکزی ۱۲۴

۴-۴-۱ همگرایی‌های تصادفی ۱۲۵

۴-۴-۲ قانون اعداد بزرگ ۱۲۶

۴-۴-۳ قضیه حد مرکزی ۱۳۰





فصل

# فضاهای احتمال و متغیرهای تصادفی

## ۱-۱ فضاهای قابل اندازه‌گیری<sup>۱</sup> و اندازه احتمال

برای شروع با یک نگرش ساده، دوره زندگی بنگاه‌های اقتصادی در اقتصاد را تک دوره‌ای فرض می‌کنیم به طوری که در آن زمان آغاز  $t = 0$  و زمان پایان  $T = 1$  می‌باشد. بعضی از اوراق بهادار مالی (دارایی‌ها) در زمان صفر در بازار معامله می‌شوند و عایدات را در زمان یک تولید می‌نمایند.

بسته به تعداد دارایی‌ها و پیچیدگی مدل مورد نظر، می‌توانیم تعدادی از وضعیت‌های احتمالی را برای عایدات و، به طور کلی، برای کل اقتصاد در نظر بگیریم. مجموعه‌ای از احتمالات به عنوان مجموعه حالات طبیعی<sup>۲</sup> شناخته می‌شود و با نماد  $\Omega$  نشان داده می‌شود.<sup>۳</sup> بسته به این که چگونه بخواهیم بازار را توصیف کنیم،  $\Omega$  می‌تواند متناهی یا نامتناهی در نظر گرفته شود.

زیر مجموعه‌های  $\Omega$  از حالات طبیعی ساخته شده‌اند که اطلاعات درباره وضعیت ممکن (احتمالی) در تاریخ  $T$  را توصیف می‌کنند. برای مثال، اگر فقط یک دارایی مخاطره‌دار در بازار معامله شده باشد، طیفی از قیمت‌های نهایی برای این دارایی با زیر مجموعه‌های طبیعی همراه است. بنا به دلایل فنی، جزئیات را در این جا بررسی

---

<sup>1</sup> Measurable Space.

<sup>2</sup> Set of States of Nature.

<sup>3</sup> در کتاب‌های ریاضی تئوری احتمال،  $\Omega$  اغلب برای بیان فضای نمونه آزمایش تصادفی استفاده می‌شود. در متن کتاب ما آزمایش تصادفی که در آن بعضی از وضعیت‌ها را انتخاب می‌کنیم اقتصاد یا بازارهای مالی هستند.

## فصل ۱ فضاهای احتمال و متغیرهای تصادفی ۳

نمی‌کنیم، وقتی  $\Omega$  بسیار بزرگ است همه‌ی زیر مجموعه‌های  $\Omega$  را نمی‌توان در مدل در نظر گرفت.<sup>۱</sup> اگر  $\mathcal{P}(\Omega)$  نشان دهنده مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های  $\Omega$  باشد، مدل را به زیر مجموعه‌های سازگار با بعضی ویژگی‌های قابل قبول مجاز برای تعریف اندازه احتمال محدود می‌کنیم. به همین جهت (شاید) به مفهوم انتزاعی از جبر- $\sigma$  نیاز داریم.<sup>۲</sup>

### ۱-۱-۱ $\sigma$ -جبری (یا تبار) مبتنی بر مجموعه $\Omega$

**تعریف ۱** اجازه دهید  $\Omega$  نماد مجموعه‌ای از حالات طبیعی باشد و  $\mathcal{P}(\Omega)$  مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های  $\Omega$  باشد: جبر- $\sigma$  مبتنی بر  $\Omega$  (که همچنین تبار نیز نامیده می‌شود) یک زیر مجموعه  $\mathcal{A}$  از  $\mathcal{P}(\Omega)$  است که با موارد زیر سازگار است:

$$1. \Omega \in \mathcal{A}$$

$$2. \forall B \in \mathcal{A}, B^c \in \mathcal{A}$$

در این جا  $B^c$  متمم  $B$  است و بوسیله  $B^c = \{\omega \in \Omega / \omega \notin B\}$  تعریف می‌شود. پس  $\mathcal{A}$  نسبت به متمم بسته است.

۳. برای هر دنباله  $(B_n, n \in \mathbb{N})$  از اعضا  $\mathcal{A}$ ، داریم  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{A}$ . به دیگر سخن  $\mathcal{A}$  نسبت به اجتماع قابل شمارش بسته است.

جفت  $(\Omega, \mathcal{A})$  فضای قابل اندازه‌گیری<sup>۳</sup> نامیده می‌شود و اعضا  $\mathcal{A}$  پیشامدها<sup>۴</sup> نامیده می‌شوند. پیشامدی که فقط شامل یک حالت طبیعی می‌باشد، یک پیشامد ساده<sup>۵</sup> است.

---

<sup>۱</sup> وقتی  $\Omega$  قابل شمارش نیست، اندازه احتمال نمی‌تواند روی  $\mathcal{P}(\Omega)$  به روش سازگار تعریف شود. این در قسمت ۳-۱-۱ تعدیل شده است.

<sup>۲</sup> نماد  $\sigma$  اغلب در مالی برای نشان دادن انحراف معیار بازده اوراق بهادار مالی (به فصل ۲ نگاه کنید) استفاده می‌شود. در این جا، ارتباطی با تفسیر معمول ندارد، اما  $\sigma$ -جبری معمولاً در نظریه احتمال برای بیان مفهومی است که در زیر تعریف شده است.

<sup>۳</sup> Measurable Space.

<sup>۴</sup> Events.

<sup>۵</sup> Elementary Event.